RESUMEN DE LOS ALGORITMOS.

2.- SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN 1.

a.- Ecuación diferencial de orden 1: $\frac{dy}{dx} = P(x)y + G(x)$

b.- Sistema. $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

El sistema se reescribe de la forma

$$\frac{dy}{dx} = A_{(t)}.y + G(t)$$

DEFINICIONES:

$$\frac{dx}{dt} = A_{(t)}x \quad \left[\text{SISTEMA HOMOGENEO} \quad G_{(t)} = 0\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = A_{(t)}x + G_{(t)} \quad [\text{SISTEMA NO HOMOGENEO}]$$

*** TEOREMA:** La solución general del sistema no homogéneo es la suma de la solución del sistema general (homogéneo) mas la solución particular (no homogéneo).

*** TEOREMA:** Si X_1 y X_2 son soluciones del sistema homogéneo entonces, cualquier combinación lineal de estas también es solución del sistema.

TEOREMA: Las siguientes proposiciones son equivalentes entre si.

(1).- $\{x^1 \dots x^n\}$ es un conjunto linealmente $\frac{\text{Independiente}}{\text{Dependiente}}$

(2).- $\{x^1(t) \dots x^n(t)\}$ $\forall t$ es un conjunto linealmente $\frac{\text{Independiente}}{\text{Dependiente}}$

(3).- Existe un t_0 tal que $\{x^1(t_0) \dots x^n(t_0)\}$ es un conjunto linealmente $\frac{\text{Independiente}}{\text{Dependiente}}$

*** DEFINICION:** Se llama "<u>matriz fundamental</u>" del sistema diferencial a la matriz formada

$$\begin{bmatrix} X^1 & X^2 & X^3 & \dots & X^n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ & & & \dots & \end{bmatrix}$$

CASO: LA MATRIZ $A_{(T)}$ ES DE COEFICIENTES CONSTANTES. HOMOGENEO.

LAS SOLUCIONES VIENE DE LA FORMA

$$X_1 = e^{h(t)} . \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

.- Donde $h(t)$ es el autovalor asociado a la matriz $A(t)$

.- y $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ es el autovector de la matriz $A(t)$ asociado al autovalor $h(t)$

CASOS (1).- *A tiene "n" autovalores LI con "n" autovectores.*

Las soluciones vienen dadas de la forma.

$X^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$

$X^2(t) = K^2 e^{\lambda_2 t}$ $\dots \dots \dots \dots \dots X^n(t) = K^n e^{\lambda_n t}$

Son "n" soluciones LI del sistema HOMOGENEO.

<u>SOLUCION GENERAL</u>: $c_1 X^1(t) + c_2 X^2(t) + \cdots + c_n X^n(t)$

CASOS (2). *A no tiene "n" autovalores LI ≈ A tiene autovalores de Multiplicidad Algebraica > Multiplicidad Geométrica*.

Nota, es decir que un autovalor de $MA > 1$ tiene asociado autovectores menores a MA, entonces se procede a obtener soluciones adicionales LI a las anteriores.

* Se determina las soluciones restantes por medio del siguiente método.

1.- Caso particular de una segunda solución.

Suponemos $X^{s+1} = (u + tV)e^{\lambda t}$ es solución del sistema, entonces se cumple que

$$\frac{dX^{s+1}}{dt} = A_{(t)}X^{s+1} \quad => \quad \lambda u + V(1 + \lambda t) = Au + tAV$$

Para t^0 $\quad \lambda u + V = Au$

t^1 $\quad \lambda V = AV \quad =>$ V es autovector de A asociado a λ

De este sistema se determina $u \; y \; V$ de manera que la segunda solución viene dado por:

$X^{s+1} = (u + tV)e^{\lambda t} \quad u, V \epsilon R^n$

Análogamente se tiene.

$X^{s+2} = (u + tV + t^2W)e^{\lambda t} \qquad u, V, W \epsilon R^n$

...

$X^m = (u + tV + t^2W + t^3Q + \cdots + t^mY)e^{\lambda t} \quad u, V, W, Q, \dots, Y \epsilon R^n$

Si tiene duda de cómo determinar los vectores incógnitas $\boldsymbol{u, V, W, Q, \dots, Y \epsilon R^n}$ lo único que debe hacer es suponer que es solución del sistema homogéneo $\boldsymbol{\frac{dX}{dt} = A(t)X}$ y evalúe para $\boldsymbol{t = 0, 1, 2, \dots, m}$

CASOS (3): *A tiene autovalores **COMPLEJOS.***

Recuerde que estos valores SIEMPRE vienen en PAREJAS y de la forma $\lambda = a + ib$

Resumen para determinar las soluciones.

$$\begin{cases} (1)\ Sean\ los\ autovalores\ \lambda_1 = a + ib\ \ y\ \lambda_2 = a - ib \\ (2) Escribimos\ las\ soluciones\ \ [\boldsymbol{autovector}]\boldsymbol{e}^{[\boldsymbol{autovalor}]\boldsymbol{t}} \end{cases}$$

En la exponencial separamos las potencias y recordamos la ecuación de Euler

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Entonces sea.

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \quad y \quad e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$$

Se tiene que, los autovectores también serán complejos, separando lo real e imaginario:

$$\tilde{X}(t) = (a+ib)e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(a+ib)(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$

$$\tilde{\tilde{X}}(t) = (a-ib)e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(a-ib)(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$$

Entonces las soluciones que se obtiene de las raíces complejas serán las <u>**combinaciones lineales**</u> apropiadas para que sean:

$$X^1(t) = \frac{\tilde{X}(t) + \tilde{\tilde{X}}(t)}{2} = e^{\alpha t}(a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)) \quad \text{PARTE REAL}$$

$$X^2(t) = \frac{\tilde{X}(t) - \tilde{\tilde{X}}(t)}{2i} = e^{\alpha t}(a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)) \quad \text{PARTE IMAGINARIA}$$

SON LAS SOLUCION LI DEL SISTEMA DADO.

RESUMEN: Cuando los autovalores son complejo solo trabaje con uno de ellos determine la forma general usando la ecuación de Euler y escoja la parte REAL como una primera solución y la parte IMAGINARIA para una segunda solución.

SOLUCIONES PARTICULAR A CASO DE SISTEMAS NO HOMOGENEOS.

$$\frac{dx}{dt} = A_{(t)}x + G_{(t)}$$

Debemos buscar una solución y_p tal que sea solución del sistema no homogéneo.

Por lo cual se tiene que se cumple

$$X(t).\frac{du(t)}{dt} = G(t) \qquad (1)$$

De esto se determina $u(t)$ siguiendo los siguientes pasos.

i.- Se despeja $u'(t)$ de (1)

Ya sea **i.i.-** Calcular $X^{-1}(t) \rightarrow u'(t) = X^{-1}(t).G(t)$

i.ii.- Hacer eliminación Gauss - Jordan con incógnita $u'(t)$ y se despeja.

ii.-Integrar y Obtener $u(t)$

iii.- Se calcula $\mathrm{X}(t).u(t) = y_p$ la cual vendrá ser la solución particular del sistema no homogéneo.

OJO TENGA PRESENTE QUE $X(t)$ES <u>LA MATRIZ FUNDAMENTAL</u> DEL SISTEMA, SU DEFINICION ESTA PRESENTE EN ESTA GUIA.

NOTA:

La gran mayoría de los profesores dan este método

$$y_p = X(t)\int X^{-1}(t)G(t)dt$$

La dificultad radica en que hay que hallar la inversa de la matriz fundamental, esto puede ser tedioso debido a las funciones senos cosenos o exponenciales presentes.

Sin embargo el método explicado cumple con esto pero PASO a PASO.

$$\underbrace{X(t)\underbrace{\int \underbrace{X^{-1}(t)G(t)}_{\frac{du(x)}{dx}}dt}_{U(x)}}_{Sol\ Particular}$$

ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN N LINEAL. HOMOGENEA

$$L_n(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = G(t)$$

Resolución de ecuación diferencia de orden “n” HOMOGENEAS. $\boldsymbol{G(t) = 0}$

$$L_n(y) = 0$$

Se determina la <u>ECUACION CARACTERISTICA</u>. Puede pensar como que cada vez que se deriva representa una potencia en el polinomio.

$$R^n + a_{n-1}R^{n-1} + a_{n-2}R^{n-2} + \cdots + a_1 R + a_0 = 0$$

Se determina las raíces $R_1, R_2, \dots, R_n$ y las soluciones de la ecuación vienen de la forma

$$X^1(t) = e^{R_1 t} \dots\dots \;\; X^n(t) = e^{R_n t}$$

Solución general será $\qquad C_1X^1(t) \dots\dots \;\; C_nX^n(t)$

CASO (1): *La Ecuación Característica (EC) tiene “n” soluciones reales diferentes*.

Entonces las soluciones vienen de la forma $\{e^{R_1 t}, e^{R_2 t}, e^{R_3 t}, \dots, e^{R_n t}\}$ son n soluciones Linealmente Independientes.

<u>SOLUCION GENERAL</u> $C_1Y^1 + C_2Y^2 + C_3Y^3 \dots + C_nY^n$

CASO (2): *EC tiene una raíz real con multiplicidad “m” SE REPITEN LAS RAICES.*

Entonces las soluciones se forman de la manera

$$Y^1 = e^{R_1 t}\,; \;\; Y^2 = te^{R_1 t}\,; Y^3 = t^2e^{R_1 t}; \dots; Y^m = t^m e^{R_1 t}$$

Soluciones asociadas a la raíz R_1 y son LI.

NOTA: Tan solo multiplique por la variable independiente tanta veces se repita la raíz.

CASO (3): *EC tiene “n” raíces COMPLEJAS.*

Se procede a determinar las raíces complejas que vienen en pares

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

Por lo cual las soluciones de la ecuación vienen de la forma

$$\bar{y} = e^{(\alpha+i\beta)t} \quad y \quad \tilde{y} = e^{(\alpha-i\beta)t}$$

Entonces se tendrá que las soluciones particulares a esta ecuación surgen de la combinación lineal.

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}+\tilde{y}}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad \text{PARTE REAL} \\ \dfrac{\bar{y}-\tilde{y}}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \quad \text{PARTE IMAGINARIA} \end{cases}$$

CASO (4): *EC tiene raíces COMPLEJAS con multiplicidad mayor a 1*

Sea la raíz $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con potencia “m”

Las soluciones vienen de la siguiente forma.

$$\bar{y} = e^{(\alpha+i\beta)t} \quad y \quad \tilde{y} = e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$\bar{\tilde{y}} = te^{(\alpha+i\beta)t} \quad y \quad \bar{\bar{y}} = te^{(\alpha-i\beta)t}$$

…………..

$$\bar{\check{y}} = t^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)t} \quad y \quad \hat{y} = t^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

Por lo cual las soluciones particulares surgen de la combinación lineal.

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}+\tilde{y}}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ \dfrac{\bar{y}-\tilde{y}}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{\tilde{y}}+\bar{\bar{y}}}{2} = te^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ \dfrac{\bar{\tilde{y}}-\bar{\bar{y}}}{2i} = te^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{cases}$$

………

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{\check{y}}+\hat{y}}{2} = t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ \dfrac{\bar{\check{y}}-\hat{y}}{2i} = t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{cases}$$

ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN N LINEAL. "NO HOMOGENEA"

METODO DE COEFICIENTE INDETERMINADOS.

Lo que persigue este método es determinar la solución particular del sistema NO HOMOGENEO de las ecuaciones diferenciales lineales de orden "n".

EN ESTE METODO HAY QUE ESTAR PENDIENTE DE *CÓMO ESTA FORMADO EL TERMINO FORZANTE* $G(t)$.

CASO (1): *El termino forzante está formado por combinación lineal (CL) de exponencial y polinomio.*

$$G(t) = e^{\alpha t}(a_s t^s + a_{s-1}t^{s-1} + \cdots + a_1 t + a_0)$$

Caso 1.1 SI α ES RAIZ DEL POLINOMIO CARACTERISITICO (PC).

Entonces la solución particular vendrá de la forma, donde m es la cantidad de veces que se repite α

$$y = t^m e^{\alpha t}(b_s t^s + \cdots + b_o)$$

Caso 1.2. SI α NO ES RAIZ DEL PC.

En este caso la solución viene de la forma

$$y = e^{\alpha t}(b_s t^s + \cdots + b_o)$$

CASO (2) *El termino forzante está formado por combinación lineal de exponencial polinomio y senos o cosenos.*

$$G(t) = e^{\alpha t}(a_s t^s + a_{s-1}t^{s-1} + \cdots + a_1 t + a_0)\sin(\beta t)$$

$$G(t) = e^{\alpha t}(a_s t^s + a_{s-1}t^{s-1} + \cdots + a_1 t + a_0)\cos(\beta t)$$

Casos 2.1 .- Si $\alpha + i\beta$ es raíz PC

Entonces la solución viene de la forma. Donde m es la cantidad de veces que se repite $\alpha + i\beta$

$$y = t^m e^{\alpha t}(b_s t^s + \cdots + b_0)\sin(\beta t) + t^m e^{\alpha t}(c_s t^s + \cdots + c_0)\cos(\beta t)$$

Caso 2.2 .- Si $\alpha + i\beta$ NO es raíz característica del PC

En este caso las soluciones son.

$$y = e^{\alpha t}(b_s t^s + \cdots + b_0)\sin(\beta t) + e^{\alpha t}(c_s t^s + \cdots + c_0)\cos(\beta t)$$

NOTA IMPORTANTE:

Se debe despejar los valores de b y c. Sustituya la solución en la ecuación diferencial y despeje los valores de las constante tanta sean necesarias.

METODO DE VARIACION DE PARAMETROS.

Si se realiza un cambio de variable a la ecuación de orden "n"

$$\Lambda = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}$$

Queda que la ecuación lineal: $L_n(t) = G(t)$ transformado a un sistema

$$\Lambda' = A(t)\Lambda + P(t)$$

Queremos entonces es buscar una solución particular $\hat{\Lambda}$ del sistema $\Lambda' = A(t)\Lambda + P(t)$ y asi tendremos una solución $\hat{y}^1$ la cual será solución particular de $L_n(t) = G(t)$.

La solución $\hat{\Lambda} = X(t).U(t)$ donde $X(t)$ es la <u>MATRIZ FUNDAMENTAL</u>. Y $U(t)$ viene de:

$$X(t).U'(t) = P(t)$$

Es un proceso análogo al de los sistemas de ecuaciones debido a que el cambio de variable transforma la ecuación lineal a un sistema. Pero ojo en este caso

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ G(t) \end{pmatrix}$$

Y otro punto <u>**importante**</u> $\widehat{\boldsymbol{X}}^{\mathbf{1}} = \left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t})\right)_{\boldsymbol{fila\ 1}}$ lo que quiere decir que la solución particular a la ecuación lineal de orden "n" es la primera fila de la matriz $\hat{\Lambda}$.

NOTA: La matriz fundamental en este método se obtiene buscando las soluciones de la ecuación lineal homogénea y luego derivamos para ir obteniendo los otros términos de la columna.

$$X(t) = \begin{pmatrix} Y1 & Y2 & \dots & Yn \\ Y'1 & Y'2 & \dots & Y'n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y^n1 & Y^n2 & \dots & Y^nn \end{pmatrix}$$

METODO DEL ANULADOR.

Sea la ecuación diferencial de orden "n"

$$L_n(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = G(t)$$

Se define el <u>OPERADOR DIFERENCIAL</u> de la siguiente forma.

NOTA: La D es el operador diferencial derivada y la potencia indica la cantidad de veces que se va a derivar la variable, y la I es el operador nulo (no se deriva).

$$T = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0 I)$$

Por lo tanto la ecuación diferencial se puede reescribir de la forma

$$L_n(y) = T(y) = G(t)$$

Se tiene que si $G(t)$ es de la forma combinación lineal de exponencial, senos o cosenos entonces. ***<u>IMPORTANTE</u>***

$$(D - aI)^m(t^k e^{at}) = 0$$

$$(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I)^m(t^k e^{at}\cos(bt)) = 0$$

$$(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)I)^m(t^k e^{at}\sin(\beta t)) = 0$$

Siempre y cuando $0 \leq k \leq m - 1$, es decir que $m = k + 1$

Por lo cual se tiene: **RECUERDE ESTO.**

$$\boldsymbol{(D - aI)^{m+1} \quad anula \quad a \quad (t^k e^{at})}$$

$$\boldsymbol{(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I)^{m+1} \quad anula \quad a \quad (t^k e^{at}\cos(bt))}$$

$$\boldsymbol{(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)I)^{m+1} \quad anula \quad a \quad (t^k e^{at}\sin(\beta t))}$$

Una vez que haya determinado el anulador del término que componen a $G(t)$ "multiplique" ambos lados de $L_n(t) = G(t)$ de manera que obtiene una ecuación HOMOGENEA, ya que el operador con se multiplica garantiza que $G(t)$ sea nulo. Resuelva por medios antes estudiados. (Polinomio característico).

Note que una vez que se multiplica por el anulador. Se crea *nueva soluciones* a la ecuación diferencial. Una que proviene de la **ecuación homogénea** y otra que viene del

anulador. Por lo tanto debo "suprimir" la que se origina de la ecuación homogénea por lo cual procedemos al siguiente razonamiento.

$$L_n(y) = y_{homogeneo} + y_{anulador}$$

Se multiplica el operador diferencial T de la ecuación diferencial por $y_{anulador}$ e igualamos a $G(t)$.

$$T(y_{anulador}) = G(t)$$

Ya que $T\left(y_{homogeneo}\right) = 0$, Se despeja las constantes presente en la solución del anulador y este vendrá a ser la solución particular que se buscaba de un principio.

ECUACION DE EULER.

Sea ecuación diferencial con coeficientes no constantes

$$a_i(t) = \frac{ctte}{t^i} = b_i$$

$$L_n(y) = y^n + \frac{b_{n-1}}{t^{n-1}} y^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{t^{n-2}} y^{n-2} + \cdots + \frac{b_1}{t} y' + b_0 y = G(t)$$

Con $t \neq 0$

Se va a realizar un <u>**cambio de variable**</u>

$$\begin{cases} si \;\; t > 0 \;\; cambio\ sera \;\; t = e^u \\ si \;\; t < 0 \;\; cambio\ sera\ t = -e^u \end{cases}$$

Con este cambio se transforma la ecuación lineal con coeficientes variables a una ecuación diferencial de <u>**coeficientes constantes**</u>.

Aplique cualquier método ante estudiado para su resolución.

Importante: Como y depende de t ($y(t)$) entonces el cambio de variable viene

$$y(e^u)$$

Y luego se determina las n-esimas derivadas de y con respecto a u.

Tenga presente lo siguiente.

$$\text{cambio } x = e^{u} \ \rightarrow u = \ln(x)$$

Derive

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-u}$$

Se puede demostrar de manera general como se determina $y^{n}(e^{u})$

$$y^{k} = e^{-ku}\left(\sum_{i=1}^{k} r_{ik} s^{i}(u)\right) \quad con\ r_{ik}\ en\ R$$

LUEGO RECUERDE **REGRESAR** EL CAMBIO DE VARIABLES.

PUNTOS FINALES.

(1) Note que los anteriores métodos son **algoritmo**s para resolver ecuaciones diferenciales.

(2) Puede en cierta forma se tedioso debido a la amplia gama de posibilidades que se puede presentar. Sin embargo la práctica permite manejar bien estos métodos.

(3) Los métodos de coeficientes indeterminados, método del anulador y de variación de parámetros queda a *juicio del profesor* cual enseñar, aquí le presento los tres para que vean sus diferencias.

(4) No se equivoque en las raíces de los polinomios, ya que puede ser catastrófico al momento de dar el resultado, como habrá notado a cada raíz se le asocia una rama de soluciones particulares y generales por lo tanto si determino mal la raíz tendrá TODA esta rama errada y implica EJERCICIO MALO.

Para practicar descargue la guía de **ECUACIONES DIFERENCIALES SEGUNDA PARTE**.

Para mayor información consulte.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.

(1) Ana M de Viola-Prioli, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. Editorial Equinoccio Universidad Simón Bolívar, Publicación Libros de EL NACIONAL.

(2) George F. Simmons, DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATIONS AND HISTORICAL NOTES, Ediciones McGraw-Hill

(3) R. Kent Nagle, Edward B. Saff, A. David Snider "FUNDAMENTALS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS" FOURTH EDITION, PEARSON ADDISON WESLEY, 2004.

Actualizado: **NOVIEMBRE 2011**

Elaborador por: Miguel Guzman